2. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

După cum am văzut în formularea newtoniană a mecanicii clasice ecuațiile de mișcare, ce descriu evoluția în timp a unui sistem de puncte materiale, sunt ecuațiile lui Newton. Conceptele fundamentale ale acestei formulări sunt forțele, mărimi vectoriale cu semnificație intuitivă simplă. Pe de altă parte rezolvarea ecuațiilor lui Newton devine din ce în ce mai dificilă atunci când sistemele analizate posedă diverse tipuri de legături.

În acest capitol vom introduce o nouă viziune asupra mecanicii relativ la descrierea mișcării, în care vom avea alte obiecte fundamentale în descrierea sistemelor. Vom introduce pe scurt formalismul Lagrangian și formalismul Hamiltonian în descrierea mișcării (evoluției) ~~sist~~ sistemelor de puncte materiale în mecanica clasică. O astfel de descriere a mecanicii clasice mai poartă numele și de mecanică analitică.

2.1 Formalismul Lagrangian

2.1.1. Principiul variațional. Ecuațiile Euler-Lagrange

În acest paragraf vom prezenta pe scurt modul de abordare a unei probleme variaționale.

Fie $\xi^1(z), \dots \xi^N(z)$ un set de funcții de parametrul real z, continue și derivabile cel puțin în ordinul doi (de clasă C^2) pe un interval $[z_1, z_2]$. În plus vom presupune că aceste funcții satisfac condițiile (locale)

$$\xi^\alpha(z_1) = a^\alpha, \; \xi^\alpha(z_2) = b^\alpha \quad , \alpha = 1, \dots, N. \qquad (1)$$

Construim mărimea

$$I[\xi^\alpha] = \int_{z_1}^{z_2} dz\, L(\xi^\alpha(z), \dot{\xi}^\alpha(z), z), \qquad (2)$$

unde $\dot{\xi}^\alpha(z) = \dfrac{d\xi^\alpha(z)}{dz}$, și $L(\xi^\alpha(z), \dot{\xi}^\alpha(z), z)$ este o funcție

diferențiabilă de $2N+1$ variabile, presupusă cunoscută.
Se remarcat faptul că variabilele $(\xi^\alpha, \dot{\xi}^\alpha)$ sunt considerate independente.

$I[\xi^\alpha]$ reprezintă ceea ce se ~~numește~~ numește o funcțională. În general o funcțională este o aplicație de la un spațiu de funcții ~~la~~ la mulțimea numerelor reale (sau complexe).

În cazul nostru ~~spunem~~ că funcționala are o reprezentare integrală, adică unui set de funcții $(\xi^\alpha(z))_{\alpha=\overline{1,N}}$ precizate face să îi corespundă un număr (real) care reprezintă integrala funcției $L(\xi^\alpha(z), \dot{\xi}^\alpha(z), z)$ pe intervalul $[z_1, z_2]$ care are o valoare bine precizată în acest caz.

Dacă notăm mulțimea funcțiilor $\xi^\alpha(z)$ prin $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \{\xi^\alpha : [z_1, z_2] \to R \,|\, \xi^\alpha \in C^2[z_1, z_2],\ \xi^\alpha(z_1) = a^\alpha,\ \xi^\alpha(z_2) = b^\alpha, \qquad (3)$$

atunci avem aplicația (funcționala

$$I : \mathcal{A} \longrightarrow R \qquad (4)$$

Dorim să determinăm în continuare condiția de extremum pentru funcționala $I[\xi^\alpha]$. Pentru a nu complica notația vom nota tot cu $\xi^\alpha(z)$ funcțiile pentru care se realizează această condiție. Condiția de extrem se scrie

$$\delta I[\xi^\alpha] = 0 \qquad (5)$$

Vom nota cu $\delta\xi^\alpha$ variația infinitezimală a funcțiilor $\xi^\alpha(z)$ în jurul formei acestora pentru care este satisfăcută condiția de extremum. Această variație va determina o variație pentru $\dot{\xi}^\alpha(z)$, notată $\delta\dot{\xi}^\alpha(z)$. Deoarece variația δ nu implică variația parametrului z putem scrie

$$\delta\dot{\xi}^\alpha(z) = \delta \frac{d\xi^\alpha(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\delta\xi^\alpha(z) \qquad (6)$$

Vom evalua variația $\delta I[\xi^\alpha]$, cu $I[\xi^\alpha]$ de forma (2)

$$\delta I[\xi^\alpha] = \delta \int_{z_1}^{z_2} dz\, L[\xi^\alpha(z), \dot{\xi}^\alpha(z), z] = \int_{z_1}^{z_2} dz\, \delta L[\xi^\alpha, \dot{\xi}^\alpha, z] \qquad (7)$$

Am ținut cont că variația δ nu implică ~~pe~~ z și deci

$$\delta\int_{z_1}^{z_2} dz\, L = \int_{z_1}^{z_2} dz\, \delta L \qquad (8)$$

În continuare obținem

$$\delta I[\xi^\alpha] = \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \delta\xi^\alpha(z) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \delta\dot{\xi}^\alpha(z) \right) =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \delta\xi^\alpha(z) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \frac{d}{dz} \delta\xi^\alpha(z) \right) =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \delta\xi^\alpha(z) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \delta\xi^\alpha \right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) \cdot \delta\xi^\alpha \right) =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) \delta\xi^\alpha + \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \delta\xi^\alpha \right) =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) \delta\xi^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(z_2)\, \delta\xi^\alpha(z_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(z_1)\, \delta\xi^\alpha(z_1)$$

Cum știm că $\xi^\alpha(z_2) = b^\alpha$ și $\xi^\alpha(z_1) = a^\alpha$ cu b^α și a^α fixate, $\delta\xi^\alpha(z_2) = \delta b^\alpha = 0$ și $\delta\xi^\alpha(z_1) = \delta a^\alpha = 0$ și obținem

$$\delta I[\xi^\alpha] = \int_{z_1}^{z_2} dz\, \delta\xi^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) = 0, \qquad (9)$$

unde am utilizat și condiția de extremum pentru $I[\xi^\alpha]$. Variațiile $\delta\xi^\alpha(z)$ au fost alese arbitrar și ultima relație trebuie să aibă loc oricare ar fi acestea obținem

$$\delta I[\xi^\alpha] = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = 0 \qquad (10)$$

În concluzie condiția necesară ca funcționala $I[\xi^\alpha]$ să aibă un extremum în $\xi^\alpha(z) \in \mathcal{F}$ este ca funcțiile $\xi^\alpha(z)$ să fie soluții ale ecuațiilor

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha(z)} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha(z)} = 0 \quad, \alpha = \overline{1,N}, \qquad (11)$$

unde $L = L(\xi^\alpha(z), \dot{\xi}^\alpha(z), z)$.

Ecuațiile de mai sus poartă numele de ecuații Euler-Lagrange.

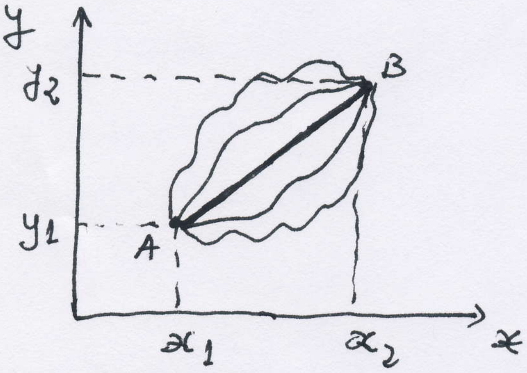
Pe baza primei egalități din (9) obținem și implicația inversă (condiția suficientă), adică

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = 0 \Rightarrow \delta I[\xi^\alpha] = 0 \qquad (12)$$

<u>Concluzie</u> Condiția necesară și suficientă ca funcționala $I[\xi^\alpha]$ să aibă un extremum în $\xi^\alpha(z) \in \mathcal{D}$ este ca funcțiile $\xi^\alpha(z)$ să fie soluții ale ecuațiilor Euler-Lagrange (11).

<u>Exemplu simplu</u>

Considerăm două puncte din planul euclidian având coordonatele (x_1, y_1) respectiv (x_2, y_2). Ne propunem să determinăm din mulțimea curbelor ce trec prin cele două puncte curba ce are lungime minimă.



$A \equiv (x_1, y_1)$

$B = (x_2, y_2)$

Problema enunțată mai sus este o problemă variațională. Funcționala I în acest caz face să corespundă unei curbe (care e parametrizată prin funcții) lungimea sa (adică un număr real).

In plan o curbă se exprimă parametric astfel

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

Mai simplu putem alege drept parametru coordonata x și obținem pentru că o curbă în plan este exprimată prin funcția $y = y(x)$. (13)

In plus avem condițiile:

$$y_1 = y(x_1) \ ; \ y_2 = y(x_2) \qquad (14)$$

Elementul infinitezimal de lungime în planul euclidian este

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (15)$$

Lungimea unei curbe arbitrare între punctele A și B este

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+(y')^2} \qquad (16)$$

unde $y' = \frac{dy}{dx}$

Suntem astfel plasați în cadrul teoretic general analizat anterior, urmând a determina minimul funcționalei $I[y]$

Avem corespondența cu teoria generală:

$\tau \longleftrightarrow x$, $\xi^\alpha(\tau) \longleftrightarrow y(x)$ (α este unic și nu se mai notează), $\dot{\xi}^\alpha(\tau) \longleftrightarrow y'(x)$, și

$L(\xi^\alpha, \dot{\xi}^\alpha, \tau) \longleftrightarrow L(y, y', x)$ cu forma concretă

$$L(y, y', x) = \sqrt{1+(y')^2} \qquad (17)$$

În acest caz avem o singură ecuație Euler-Lagrange (11)

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \qquad (18)$$

Dar $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}$ și ecuația (18) se scrie

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \qquad (19)$$

Această ecuație reprezintă o ecuație diferențială ordinară de ordinul doi. Ea se rezolvă simplu prin integrări succesive. Așadar obținem

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_0, \quad C_0 \text{ constantă reală}$$

și

$$(y')^2 = C_0^2 + C_0^2 (y')^2,$$

adică $y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{C_0}{\sqrt{1-C_0^2}} \equiv C_1$ - constantă

Integrând încă o dată $\frac{dy}{dx} = C_1$ obținem soluția generală a ecuației diferențiale (19) de forma

$$y(x) = C_1 x + C_2 \qquad (20)$$

Utilizând condițiile bilocale (14), obținem sistemul de ecuații algebrice în constantele c_1 și c_2

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 x_1 + c_2 = y_1 \\ c_1 x_2 + c_2 = y_2 \end{cases} \qquad (21)$$

Soluția sistemului (21) se determină simplu și este

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{și} \quad c_2 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Obținem astfel soluția căutată

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \le x \le x_2 \qquad (22)$$

Funcția (22) reprezintă un segment dreaptă între punctele (x_1, y_1) și (x_2, y_2).

Așadar (cum era de așteptat, intuitiv) dintre toate curbele ce unesc două puncte lungimea cea mai mică o are segmentul de dreaptă.

2.1.2. Ecuațiile lui Lagrange. Principiul minimei acțiuni

2.1.2.1 Ecuațiile lui Newton

Arătăm în continuare că ecuațiile lui Newton pot fi obținute din ecuațiile Euler-Lagrange printr-o alegere corespunzătoare a funcției L. Vom analiza problema mișcării unui sistem de puncte materiale în câmpuri potențiale. Fie un sistem de n puncte materiale cu masele m_a, $a = 1, \dots, n$. Faptul că sistemul evoluează în câmpuri potențiale presupune după cum am văzut în cadrul mecanicii newtoniene existența unor energii potențiale (potențiale) care depind de poziția particulei. Reunim toate aceste funcții de poziție într-o singură funcție de poziție, ce reprezintă energia potențială totală a sistemului, pe care o vom numi simplu potențial și care are forma generală

$$V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \qquad (23)$$

Introducem coordonatele carteziene pentru fiecare particulă $\vec{r}^{(a)} \equiv (x^{(a)}, y^{(a)}, z^{(a)}) \equiv (x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_3^{(a)})$

Cu această notație funcția V (energia potențială a tuturor interacțiilor, atât interne cât și externe) se scrie

$$V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}) \equiv V(x_i^{(a)}) \qquad (24)$$

cu $a=\overline{1,n}$ și $i=1,2,3$.

Energia cinetică totală a sistemului este

$$T = \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^{\,2} = \sum_a^n \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = \sum_a^n \frac{1}{2} m_a \sum_{i=1}^{3} (\dot{x}_1^{(a)2} + \dot{x}_2^{(a)2} + \dot{x}_3^{(a)2})$$

sau

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} m_a (\dot{x}_i^{(a)})^2. \qquad (25)$$

Construim funcția $L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, t)$ numită funcție Lagrange astfel

$$L = T - V \qquad (26)$$

și obținem forma generală pentru aceasta

$$L(x_{i(t)}^{(a)}, \dot{x}_{i(t)}^{(a)}, t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} m_a (\dot{x}_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)}). \qquad (27)$$

Avem astfel următoarea corespondență cu matematica (variațională) analizată anterior

$$\alpha \leftrightarrow ((a), i), \quad \tau \leftrightarrow t, \quad \xi^{\alpha}(\tau) \leftrightarrow x_i^{(a)}(t), \quad \dot{\xi}^{\alpha}(\tau) \equiv \frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau} \leftrightarrow \dot{x}_i^{(a)} = \frac{d}{dt} x_i^{(a)} \qquad (28)$$

Ecuațiile Euler-Lagrange (11) au în acest caz forma

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^{(a)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = 0 \quad, a=\overline{1,N}, \; i=1,2,3 \qquad (29)$$

Arătăm că utilizând forma (27) a funcției L ecuațiile (29) capătă forma ecuațiilor newtoniene de mișcare:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^{(a)}} = -\frac{\partial V(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}} \qquad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} m_b (\dot{x}_j^{(b)})^2 = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} 2 m_b \dot{x}_j^{(b)} \frac{\partial \dot{x}_j^{(b)}}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} =$$

$$= \sum_{b=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} m_b \dot{x}_j^{(b)} \delta^b_a \delta^j_i = m_a \dot{x}_i^{(a)} \tag{31}$$

Ecuațiile (29) capătă astfel forma

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}} - m_a \ddot{x}_i^{(a)} = 0 \quad , a=\overline{1,N} \, , i=1,2,3 \tag{32}$$

Pentru a fi mai sugestivi revenim la notația vectorială. Ecuațiile anterioare pot fi scrise astfel

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_1^{(a)} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1^{(a)}} \\ m_a \ddot{x}_2^{(a)} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_2^{(a)}} \\ m_a \ddot{x}_3^{(a)} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_3^{(a)}} \end{cases} \qquad a=\overline{1,N} \tag{33}$$

Ținând cont că $x_1^{(a)} \equiv x^{(a)}$, $x_2^{(a)} \equiv y^{(a)}$, $x_3^{(a)} = z^{(a)}$ și înmulțind ecuațiile de mai sus cu versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ respectiv $\vec{k}$ și apoi adunându-le obținem

$$m_a(\vec{i}\ddot{x}^{(a)} + \vec{j}\ddot{y}^{(a)} + \vec{k}\ddot{z}^{(a)}) = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x^{(a)}} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y^{(a)}} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z^{(a)}}\right)V \tag{34}$$

sau

$$m_a \ddot{\vec{r}}^{(a)} = -\nabla_{\vec{r}^{(a)}} V(\vec{r}^{(b)}) \tag{35}$$

In membrul drept avem $-\nabla_{\vec{r}^{(a)}} V(\vec{r}^{(b)}) \equiv -\mathrm{grad}_{\vec{r}^{(a)}} V(\vec{r}^{(b)})$, care reprezintă după cum știm forța ce se exercită asupra particulei (punctului material) a.

Așadar ecuațiile Euler-Lagrange capătă forma finală

$$m_a \ddot{\vec{r}}^{(a)} = \vec{F}_{(a)} \qquad a=\overline{1,N} \tag{36}$$

care reprezintă ecuațiile lui Newton.

Putem concluziona că ecuațiile lui Newton pot fi obținute din principiul variațional

$$\delta S^L[x_i^{(a)}] = 0$$

unde S^L este funcționala acțiune (acțiunea Lagrangiană)

$$S^L[x_i^{(a)}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_a (\dot{x}_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)})\right) \tag{37}$$

și avem condițiile la limită $\delta x_i^{(a)}(t_1) = 0$, $\delta x_i^{(a)}(t_2) = 0$.
Aceste condiții la limită sunt condițiile bilocale generale care se exprimă în acest caz

$$x_i^{(a)}(t_1) = a_i^{(a)}$$
$$x_i^{(a)}(t_2) = b_i^{(a)}$$

, $a_i^{(a)}$, $b_i^{(a)}$ valori fixate pentru coordonate la momentele t_1 respectiv t_2

În aceste condiții avem evident condițiile la limită

$$\delta x_i^{(a)}(t_1) = \delta a_i^{(a)} = 0 \quad \text{și} \quad \delta x_i^{(a)}(t_2) = \delta b_i^{(a)} = 0$$

2.1.2.2 Legături. Ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor

Am văzut în secțiunea anterioară că ecuațiile lui Newton pot fi obținute dintr-un principiu variațional, dar nu obținem nimic nou în ceea ce privește determinarea dinamicii sistemelor de puncte materiale. Vom vedea în continuare că că această abordare simplifică mult această problemă dacă între punctele materiale ale unui sistem există anumite legături.

Vom presupune că sistemul de puncte materiale analizat este supus la legături, adică între coordonatele carteziene $x_i^{(a)}$ există niște relații de forma

$$\phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, A \leq 3n \qquad (38)$$

Ecuațiile de mai sus poartă numele de legături, sau mai exact ecuații ale legăturilor.
Obs: deși în general în ecuațiile legăturilor pot fi implicate și vitezele și timpul în cele ce urmează ne vom restrânge doar la tipul (38) de legături, așa cum vom presupune simplificator în continuare că sistemul analizat are doar interacții de tip potențial.

În continuare vom presupune că ecuațiile legăturilor au fost alese (pentru a descrie niște legături fizice precizate) astfel încât să satisfacă condițiile

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial \phi_\alpha(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}}\right)\Bigg|_{\phi_\alpha(x_i^{(a)})=0} = A \qquad (39).$$

Aceste condiții se numesc condiții de regularitate, și ele ne asigură că funcțiile ϕ_α alese pentru descrierea legăturilor sunt independente.

<u>Exemplu</u>: Considerăm un punct material obligat să se miște pe un cerc (în planul xoy) de rază R_0

În acest caz avem două legături. Acestea pot fi exprimate prin ecuațiile

$$\phi_1(x,y,z) \equiv z = 0 \qquad (40)$$

$$\phi_2(x,y,z) \equiv x^2+y^2-R_0^2 \qquad (41)$$

În acest caz $n=1$ și $A=2$ și matricea $\left(\frac{\partial\phi_\alpha(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}}\right)$ se scrie

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \qquad (41)$$

Această matrice restricționată la $\phi_\alpha(x_i^{(a)})=0$, adică $z=0$, $x^2+y^2-R_0^2=0$ ($y=\pm\sqrt{R_0^2-x^2}$) este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{z=0\\ x^2+y^2-R_0^2=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & \pm 2\sqrt{R_0^2-x^2} & 0 \end{pmatrix} \qquad (42)$$

Constatăm că această matrice are mereu rangul 2 (adică A). Pentru $x=0$ aceasta devine $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 2R_0 & 0 \end{pmatrix}$ și are rangul 2. Pentru $x=R_0$ matricea este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2R_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și are de asemenea rangul 2. Așadar condiția de regularitate este îndeplinită.

Prezența legăturilor induce apariția unor forțe de reacțiune. Vom analiza acest aspect la mișcarea unui punct material obligat să se miște pe o suprafață netedă în spațiu euclidian tridimensional. Dacă presupunem că nu există forțe ce acționează asupra punctului material (în cazul nostru energia potențială $V(x, y, z) = 0$) ecuațiile lui Newton se scriu:

$$m\ddot{x} = 0\,, \quad m\ddot{y} = 0\,, \quad m\ddot{z} = 0 \qquad (43)$$

care se integrează imediat și obținem

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}\,t + x_0 \\ y(t) = v_{0y}\,t + y_0 \\ z(t) = v_{0z}\,t + z_0 \end{cases} \qquad (44)$$

Ultimele ecuații reprezintă ecuațiile parametrice ale unei drepte în spațiu. Ori această dreaptă nu poate fi inclusă într-o suprafață, în general (cum ar fi de exemplu o sferă), ceea ce înseamnă că în acest caz ecuațiile lui Newton nu mai descriu corect mișcarea. Așadar prezența legăturilor impune introducerea unor forțe suplimentare care sunt chiar reacțiunile legăturilor.

Așadar ecuațiile lui Newton trebuie rescrise astfel

$$m_a \ddot{x}_i^{(a)} = -\frac{\partial V(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}} + R_i^{(a)} \qquad (45)$$

Observăm că în absența forțelor conservative ($V(x_i^{(a)}) = 0$) forțele de reacțiune $R_i^{(a)}$ sunt responsabile de mișcarea sistemului în prezența legăturilor.

Așadar ecuațiile (45) împreună cu ecuațiile legăturilor (38) descriu complet mișcarea sistemului de n puncte materiale supus la A legături.

Este evident că între forțele de reacțiune $R_i^{(a)}$ și funcțiile $\Phi_\alpha(x_i^{(a)})$ ce descriu legăturile există relații funcționale.
Vom analiza pentru început mișcarea unui punct material pe o suprafață netedă oarecare.
Ecuațiile (45) se scriu în acest caz

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + R_x \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} + R_y \\ m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} + R_z \end{cases} \qquad (46)$$

~~Sau~~ în scriere vectorială

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r}) + \vec{R} \qquad (47)$$

Pe de altă parte ecuația legăturii este

$$\phi(x,y,z) \equiv \phi(\vec{r}) = 0 \qquad (48)$$

Diferențiem ultima ecuație și obținem

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (49)$$

De aici observăm că $\nabla\phi \perp d\vec{r}$. Cum deplasarea punctului material se face pe suprafața $\phi(\vec{r})=0$ înseamnă că $d\vec{r}$ este tangentă la aceasta.
Așadar $\nabla\phi$ este un vector perpendicular pe suprafața în fiecare punct al acesteia (adică perpendicular pe planul tangent la suprafață).
Cum forța de reacțiune acționează perpendicular pe această suprafață putem spune că forța de reacțiune este proporțională cu vectorul $\nabla\phi$, adică

$$\vec{R} = -\lambda\nabla\phi \equiv -\lambda\,\mathrm{grad}\,\phi \qquad (50)$$

Pe componente aceasta se scrie

$$R_i = -\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3 \qquad (51)$$

Generalizând la n puncte materiale și A legături obținem

$$\vec{R}^{(a)} = -\sum_{\alpha=1}^{A} \lambda^{\alpha} \nabla_{\vec{r}^{(a)}} \phi_\alpha(\vec{r}^{(b)})$$

sau pe componente carteziene

$$R_i^{(a)} = -\sum_{\alpha=1}^{A} \lambda^{\alpha} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}} \qquad (52)$$

λ^α se numesc multiplicatori Lagrange.

Cu $R_i^{(a)}$ astfel exprimați rescriem ecuațiile (45), și obținem împreună cu ecuațiile legăturilor

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_i^{(a)} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}} - \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{A} \lambda^{\alpha} \dfrac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}} \\ \phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0 \end{cases} \qquad (53)$$

Putem spune că ecuațiile (53) descriu complet mișcarea unui sistem de n puncte materiale supus la A legături.

Aceste ecuații poartă numele de ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor. Ele reprezintă un sistem de $3n+A$ ecuații cu $3n+A$ necunoscute ($x_i^{(a)}$, $a=\overline{1,n}$, $i=1,2,3$ și λ^α, $\alpha=\overline{1,A}$)

La fel ca și în cazul absenței legăturilor aceste ecuații le putem obține dintr-un principiu variațional. Pe baza experienței anterioare putem identifica ușor funcția lui Lagrange

$$L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha, t) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_a \left(\dot{x}_i^{(a)}\right)^2 - V(x_i^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^{A} \lambda^\alpha \phi_\alpha(x_i^{(a)}) \qquad (54)$$

și acțiunea Lagrangiană

$$S^L[x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha, t). \qquad (55)$$

Asadar $\delta S^L[x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = 0$ cu condițiile la limită $\delta x_i^{(a)}(t_1) = 0$, $\delta x_i^{(a)}(t_2) = 0$ conduce la ecuațiile Euler-Lagrange care acum se scriu astfel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i^{(a)}} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda^\alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\alpha} = 0 \end{cases} \qquad (56)$$

Tinând cont de forma (54) a funcției Lagrange obținem

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^{(a)}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}} - \sum_{\alpha=1}^{A} \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} m_b \dot{x}_j^{(b)2} = m_a \dot{x}_i^{(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha}\left(-\sum_{\beta=1}^{A}\lambda^\beta \phi_\beta\right) = -\sum_{\beta=1}^{A}\phi_\beta \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial \lambda^\alpha} =$$

$$= -\sum_{\beta=1}^{A}\phi_\beta \delta^\beta_\alpha = -\phi_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\alpha} = 0$$

Introducem ultimele relații în ecuațiile (56) și obținem ecuațiile

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V_a}{\partial x_i^{(a)}} - \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{A}\lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}} - m_a \ddot{x}_i^{(a)} = 0 \\ -\phi_\alpha = 0 \end{cases}$$

care se rescriu astfel

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_i^{(a)} = -\dfrac{\partial V_a}{\partial x_i^{(a)}} - \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{A}\lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}} \\ \phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0, \end{cases}$$

adică sunt ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor (53).

2.1.2.3 Coordonate generalizate

Am văzut că pentru a descrie dinamica unui sistem de puncte materiale supuse la legături trebuie să rezolvăm ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor. Rezolvarea însă a acestui sistem de ecuații ridică atât probleme practice cât și principiale. Vom vedea în continuare cum putem evita acest lucru.

Pentru început vom analiza din nou ecuațiile legăturilor. Condițiile de regularitate ne asigură că cel puțin local (adică în vecinătatea fiecărui „punct" care satisface ecuațiile legăturilor) putem explicita A coordonate în funcție de celelalte $3n-A$, care se pot considera acum independente.

Numărul de coordonate independente necesar pentru a descrie complet poziția unui sistem de puncte materiale la orice moment poartă numele de număr de grade de libertate. În cazul nostru acesta este $f = 3n - A$. Explicitarea coordonatelor carteziene din ecuațiile legăturilor este în general complicată și uneori nici nu poate fi efectuată global. Pentru a evita aceasta se introduc coordonatele generalizate.

Coordonatele generalizate sunt funcțiile $q^I(t)$, $I = 1, \ldots, 3n-A \equiv f$ cu ajutorul cărora se exprimă coordonatele carteziene astfel încât să fie satisfăcute identic ecuațiile legăturilor. Adică

$$x_i^{(a)} = x_i^{(a)}(q^I) \tag{57}$$

astfel încât

$$\phi_\alpha\left(x_i^{(a)}(q^I)\right) \equiv 0 \tag{58}$$

Exemplu: mişcarea unui punct material pe un arc de rază R_0 în planul xOy.
Am văzut că legăturile sunt

$$\phi_1(x,y,z) \equiv z = 0$$

$$\phi_2(x,y,z) \equiv x^2+y^2-R_0^2=0$$

Avem $n=1$, $A=2 \Rightarrow f = 3n-A = 1$
Avem un grad de libertate şi deci o coordonată generalizată $q^I \to \varphi$
Alegem relaţiile (57) de forma

$$x(\varphi) = R_0 \cos\varphi$$

$$y(\varphi) = R_0 \sin\varphi$$

$$z(\varphi) = 0$$

În aceste condiţii ecuaţiile legăturilor sunt verificate identic

$$\phi_1(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = z(\varphi) \equiv 0$$

$$\phi_2(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2 - R_0^2 =$$

$$= R_0^2\cos^2\varphi + R_0^2\sin^2\varphi - R_0^2 = R_0^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - R_0^2 \equiv 0$$

2.1.2.4 Ecuaţiile lui Lagrange. Principiul minimei acţiuni

În continuare vom determina ecuaţiile pe care le satisfac funcţiile (coordonatele generalizate) $q^I(t)|_{I=\overline{1,3n-A}}$ care descriu evoluţia în timp (dinamica) unui sistem de n puncte materiale supus la legăturile $\phi_\alpha|_{\alpha=\overline{1,A}}$.
Am văzut că în coordonate carteziene ecuaţiile de mişcare au forma (53). Am văzut în secţiunea anterioară că acestea se obţin ca ecuaţii Euler-Lagrange dintr-un principiu variaţional pentru funcţionala acţiune $S^L[x_i^{(a)}, \lambda^\alpha]$
În urma introducerii coordonatelor generalizate, ecuaţiile legăturilor sunt satisfăcute identic,

$\phi_\alpha(x_i^{(a)}(q^I))\equiv 0$ și termenul $\lambda^\alpha \phi_\alpha$ se anulează, astfel că dependența de λ^α în funcția Lagrange (54) dispare și acțiunea Lagrangiană capătă forma

$$S^L[q^I]=\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_a\left(\dot{x}_i^{(a)}(q^I)\right)^2-V\left(x_i^{(a)}(q^I)\right)\right) \quad (59)$$

Din $x_i^{(a)}=x_i^{(a)}(q^I)$ obținem

$$\delta x_i^{(a)}=\frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I}\delta q^I \text{ (cu sumare după } I\text{)} \quad (59^*)$$

Condițiile bilocale $\delta x_i^{(a)}(t_1)=0$, $\delta x_i^{(a)}(t_2)=0$ conduc pe baza relației (59^*) la

$$\delta q^I(t_1)=0\ ,\ \delta q^I(t_2)=0 \quad (60)$$

Pe baza celor afirmate mai sus putem spune că principiul variațional se exprimă acum prin

$$\delta S^L[q^I]=0, \quad (61)$$

cu condițiile la limită (60).

Astfel putem scrie ecuațiile Euler-Lagrange corespunzătoare funcționalei (61) pe baza corespondenței $\xi^\alpha(\tau)\longleftrightarrow q^I(t)$. Aceste ecuații poartă numele de ecuații de mișcare Lagrange, și au forma

$$\frac{\partial L(q^I,\dot{q}^I,t)}{\partial q^I}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q^I,\dot{q}^I,t)}{\partial \dot{q}^I}\right)=0\ ,\ i=1,\dots,f\equiv 3n-A \quad (62)$$

Astfel putem spune că ecuațiile de mișcare Lagrange au fost obținute pe baza unui principiu variațional aplicat acțiunii ce descrie sistemul. Se poate arăta că acțiunea (în cele mai multe cazuri) este minimă și de aceea principiul amintit se mai numește și principiul minimei acțiuni.

Trebuie să remarcăm faptul că acțiunea Lagrangiană descrie complet un sistem de puncte materiale în formalismul Lagrangian al mecanicii clasice. Ecuațiile Euler-Lagrange se numesc doar ecuații Lagrange când funcționala are forma concretă exprimată în (59)

Ecuațiile Lagrange (62) reprezintă un sistem de $f = 3n - A$ ecuații diferențiale de ordinul doi cu necunoscute funcțiile q^I. Soluția generală a acestor ecuații depinde de $2f = 2(3n - A)$ constante arbitrare

$$q^I = q^I(t, c_1, \dots c_{2f}) \qquad (63)$$

Aceste constante se determină din condițiile la limită care sunt în număr de $2f$ (adică un sistem de $2f$ ecuații algebrice în care necunoscutele sunt cele $2f$ constante)

Funcția Lagrange

$$L(q^I, \dot{q}^I, t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{m} \sum_{i=1}^{3} m_a \left(\dot{x}_i^{(a)}(q^I)\right)^2 - V\left(x_i^{(a)}(q^I)\right) \qquad (64)$$

este exprimată în coordonate generalizate. Primul termen (energia cinetică) poate fi prelucrat astfel.

$$x_i^{(a)}(t) = x_i^{(a)}(q^I(t)) \Rightarrow \dot{x}_i^{(a)}(t) = \sum_{I=1}^{f} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \dot{q}^I(t)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{m} \sum_{i=1}^{3} m_a \sum_{I=1}^{f} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \dot{q}^I(t) \sum_{J=1}^{f} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^J} \dot{q}^J$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{f} \sum_{J=1}^{f} \left(\sum_{a=1}^{m} \sum_{i=1}^{3} m_a \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^J} \right) \dot{q}^I \dot{q}^J =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{f} \sum_{J=1}^{f} M_{IJ}(q) \dot{q}^I \dot{q}^J$$

De obicei sumările după I și J ~~se~~ subînțeleg în notație atunci când indicele se repetă și obținem pentru funcția Lagrange (Lagrangian) forma

$$L(q^I, \dot{q}^I, t) = \frac{1}{2} M_{IJ}(q) \dot{q}^I \dot{q}^J - V(q^I) \qquad (65)$$

Coeficienții $M_{IJ}(q)$ au semnificație de „mase generalizate" fiind dependenți atât de masele punctelor materiale dar și de pozițiile acestora. Ele reflectă proprietățile inerțiale ale sistemului. De exemplu dacă sistemul este un corp rigid acești coeficienți sunt momente de inerție.

Lagrangianul (Funcția lui Lagrange) este definită până la derivata totală a unei funcții arbitrare de coordonatele generalizate și timp. Într-adevăr dacă $L(q^I, \dot{q}^I, t)$ este Lagrangianul unui sistem iar $L'(q^I, \dot{q}^I, t) + \frac{d}{dt} f(q^I, t)$, atunci ambii Lagrangieni definesc aceeași acțiune în condiții la limită date și deci aceleași ecuații de mișcare Lagrange.

Justificăm în continuare afirmația de mai sus.

$$S^{L'}[q^I] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L'(q^I, \dot{q}^I, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^I, \dot{q}^I, t) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q^I, t) dt$$

$$= S^L[q^I] + f(q^I(t_2), t_2) - f(q^I(t_1), t_1)$$

Ecuațiile Lagrange se obțin pe baza principiului minimei acțiuni $\delta S[q^I] = 0$ cu $\delta q^I(t_1) = 0$, $\delta q^I(t_2) = 0$.

Așadar,

$$\delta S^{L'}[q^I] = \delta S^L[q^I] + \delta f(q^I(t), t)\big|_{t_1} - \delta f(q^I(t), t)\big|_{t_2}.$$

Cum t_1 și t_2 sunt fixați implicit $q^I(t_1)$ și $q^I(t_2)$, variația funcției f la t_1 și t_2 este nulă. Deci obținem

$$\delta S^L = 0 \Rightarrow \delta S^{L'} = 0.$$

2.1.3 Integrale prime în formalismul Lagrangian. Simetrii și legi de conservare.

Fie o funcție $F(q^I, \dot{q}^I, t)$, q^I - coordonate generalizate. Spunem că o astfel de funcție este integrală primă a mișcării (sau mărime conservativă) dacă pentru orice soluție a ecuațiilor de mișcare Lagrange (62) această funcție rămâne constantă, atunci când constantele de integrare sunt fixate.

Avem

$$F(q^I(t), \dot{q}^I(t), t) \equiv C = \text{constant}, \quad \underset{\text{a ec. L.}}{q^I(t) - \text{soluție}} \tag{66}$$

Derivăm în raport cu timpul ultima relație

$$\frac{dF}{dt}(q^I(t), \dot{q}^I(t), t) \equiv 0 \tag{67}$$

sau

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q^I} \dot{q}^I + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^I} \ddot{q}^I + \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\underset{\text{soluție a Ec L}}{q^I = q^I(t)}} = 0 \tag{68}$$

Trebuie să punctăm încă o dată faptul că o mărime este conservativă (integrală primă), adică are loc o lege de conservare, doar pe soluțiile ecuațiilor de mișcare (pe ecuațiile de mișcare)

Pentru a fi mai sugestivi considerăm ~~un~~ exemplu simplu și anume oscilatorul armonic unidimensional. Știm că $V(x) = k\frac{x^2}{2}$ pentru acest sistem și $T(\dot{x}) = \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Așadar avem Lagrangianul

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 (= T - V) \qquad (69)$$

Considerăm funcția $E = E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ care este evident energia totală a oscilatorului ($E = T + V \equiv E_c + E_p$)

Derivăm această funcție în raport cu timpul

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial E}{\partial t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} =$$

$$= \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

Pe de altă parte $x = x(t)$ trebuie să fie soluție a ecuației de mișcare Lagrange, adică

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Leftrightarrow -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Așadar obținem pentru E

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} \cdot 0 = 0 \quad \text{adică} \quad E(x, \dot{x}) = C = \text{const.}$$

Vom lega în continuare legile de conservare (integralele prime) în formalismul Lagrangian de anumite transformări de simetrie ale sistemului. Vom examina situația cea mai simplă și anume, acea care prin alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate apar în Lagrangian așa numitele <u>coordonate ciclice</u>.

Coordonatele ciclice sunt acelea care nu apar explicit în Lagrangian, adică

q^j, j-fixat coordonată ciclică dacă $\frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \qquad (70)$

Din ecuațiile Lagrange obținem

$$\frac{\partial L}{\partial q^J} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^J}\right) = 0 \quad \text{cu} \quad \frac{\partial L}{\partial q^J} = 0$$

adică $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^J}\right) = 0$. În consecință funcția

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^J} = C = \text{cont}$, adică este integrală primă (mărime conservativă) dacă q^J este ciclică.

Pe de altă parte (70) ne arată că Lagrangianul sistemului nu depinde de q^J. Vom lega acest fapt de o transformare de simetrie. Considerăm transformările

$$q^J \longrightarrow q'^J = q^J + \varepsilon^J \qquad (72)$$
$$q^I \longrightarrow q'^I = q^I \quad \text{pentru toți } I \neq J,$$

unde ε^J sunt niște parametrii arbitrari constanți. Analizăm modul de transformare ai Lagrangianului la aceste transformări, atunci când q^J este ciclică (deci nu apare în acesta explicit)

$$L(q^J, q^{I\neq J}, \dot{q}^J, \dot{q}^{I\neq J}, t) \equiv L(q^{I\neq J}, \dot{q}^J, \dot{q}^{I\neq J}, t)$$

În continuare subânțelegem că I ia toate valorile diferite de J. Transformările (72) conduc la

$$\dot{q}'^J = \dot{q}^J + \dot{\varepsilon}^J = \dot{q}^J \; (\varepsilon^J \text{ constante}), \text{ și } \dot{q}'^I = \dot{q}^I.$$

Așadar

$$L(q'^J, q'^I, \dot{q}'^J, \dot{q}'^I, t) = L(q'^I, \dot{q}'^J, \dot{q}'^I, t) =$$
$$= L(q^I, \dot{q}^J, \dot{q}^I, t) = L(q^J, q^I, \dot{q}^J, \dot{q}^I, t)$$

Adică Lagrangianul (și în consecință și acțiunea) sistemului este invariant la transformările (72) dacă q^J este coordonata ciclică. Aceste transformări care lasă Lagrangianul invariant se mai numesc și transformări de simetrie.

În general dacă sistemul are astfel de simetrii vom avea anumite legi de conservare.

În continuare ne vom limita la analiza simetriilor ce derivă doar din existența coordonatelor ciclice.

Considerăm un sistem care este invariant în raport cu translația după o axă. Vom considera chiar un punct material. Alegem axa a fi Ox. În acest caz Lagrangianul sistemului este invariant la această translație. $(x \to x' + \varepsilon,\ y \to y' = y,\ z \to z = z)$

Pentru a se realiza această invarianță am văzut că x trebuie să fie ciclică. Adică

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(y, z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{constant} \Rightarrow \text{dar } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = m v_x = p_x,$$

adică se conservă componenta p_x a impulsului.

Exemplu concret: mișcarea unui punct material în câmp gravitațional omogen și constant. Știm că energia potențială este $V(x, y, z) = mgz$ (Oz - axă verticală). Este evident că sistemul prezintă o invarianță la translațiile în planul orizontal (xOy). Lagrangianul este

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Constatăm că $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_x$, și p_y se conservă și în consecință proiecția impulsului în planul orizontal xOy.

<u>Observație</u>. Se folosește noțiunea de impuls generalizat conjugat coordonatei generalizate q_J mărimea $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J} \overset{\text{not}}{\equiv} p_J$.

Așadar dacă o coordonată este ciclică atunci impulsul conjugat acesteia se conservă

$$\frac{\partial L}{\partial q_J} = 0 \overset{E.L.}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_J = 0 \Rightarrow p_J = \text{const.} \quad (72)$$

<u>Exemplu</u>: Considerăm un punct material (m) ce se mişcă în planul xoy, într-un câmp central. Ştim că într-un câmp central energia potenţială depinde de distanţa până la un punct.

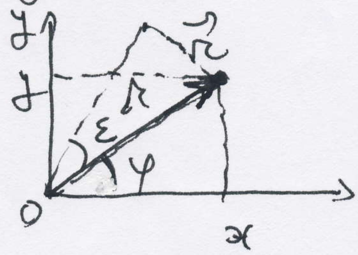
$V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$, deci în coordonate carteziene în planul xoy $\quad V(x,y) = V(\sqrt{x^2+y^2})$

Este evident că sistemul este invariant la o rotaţie în plan în jurul centrului câmpului central. Acest lucru se va observa direct din expresia Lagrangianului.

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2+y^2}) \equiv L(x,\dot{x},y,\dot{y},t)$$

Introducem sistemul de coordonate polare în plan (adecvat simetriei sistemului analizat)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= -r\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{r}\cos\varphi \\ \dot{y} &= r\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{r}\sin\varphi \end{aligned}$$



$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi$$
$$= r^2\dot{\varphi}^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) + \dot{r}^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

şi în final $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Aşadar în noile coordonate avem

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

Observăm că $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, φ − coordonată ciclică.

Pe de altă parte remarcă invarianţa Lagrangianului la rotaţia ($r \to r' = r$, $\varphi \to \varphi' = \varphi + \varepsilon$) cu unghiul ε. Adică sistemul are o simetrie la rotaţie.

Impulsul generalizat conservativ este

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

Dorim să descoperim semnificaţia fizică a acestei mărimi.

Momentul cinetic al punctului material este
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ sau

$$\vec{L} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

Cum mişcarea se desfăşoară în planul xOy, $z=0$ şi $\dot{z}=0$, obţinem

$$\frac{\vec{L}}{m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k} = [r\cos\varphi\,(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) -$$

$$- r\sin\varphi\,(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)]\vec{k} = (r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi -$$

$$- r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi)\vec{k} = r^2\dot{\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\vec{k}$$

şi în final

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \cdot \vec{k} \quad \text{sau} \quad L_z = m r^2 \dot{\varphi}$$

În concluzie p_φ reprezintă componenta în lungul axei Oz a momentului cinetic.

Aşadar momentul cinetic poate fi privit ca impuls generalizat conjugat cu o coordonată generalizată care reprezintă un unghi.

Putem spune că o invarianţă la rotaţie (simetrie la rotaţie) atrage conservarea momentului cinetic (sau a unei componente a acestuia).

Vom analiza în continuare un alt tip de invarianţă a sistemelor fizice şi anume la translaţia temporală. În acest caz Lagrangianul nu trebuie să depindă explicit de timp, adică

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Dorim să vedem ce mărime se conservă în această situaţie, evident făcând uz de ecuaţiile de mişcare Lagrange. Analizăm variaţia cu timpul a Lagrangianului.

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{d}{dt} L(q^I, \dot{q}^I, t) = \frac{\partial L}{\partial q^I}\dot{q}^I + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\frac{d}{dt}\dot{q}^I + \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q^I}\dot{q}^I + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\dot{q}^I\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\right)\cdot\dot{q}^I$$

Ultima egalitate se poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\dot{q}^I\right)-\frac{dL}{dt}=-\dot{q}^I\left(\frac{\partial L}{\partial q^I}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\right)$$

Ţinând cont de ecuaţiile Lagrange (62) membrul drept din egalitatea precedentă se anulează şi obţinem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\dot{q}^I-L\right)=0$$

Ceea ce înseamnă că avem mărimea conservativă

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\dot{q}^I-L\equiv p_I\cdot\dot{q}^I-L=\text{const}.$$

În continuare căutăm semnificaţia fizică a acestei mărimi.

Considerăm forma generală a Lagrangianului

$$L(q^I,\dot{q}^I,t)\equiv L(q^I,\dot{q}^I)=\frac{1}{2}M_{IJ}(q^I)\dot{q}^I\dot{q}^J-V(q^I)$$

de unde obţinem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^K}M_{IJ}(q^I)\dot{q}^I\cdot\dot{q}^J=\frac{1}{2}M_{IJ}(q)\left(\frac{\partial \dot{q}^I}{\partial \dot{q}^K}\dot{q}^J+\dot{q}^I\frac{\partial \dot{q}^J}{\partial \dot{q}^K}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}M_{IJ}\left(\delta^I_K\dot{q}^J+\dot{q}^I\delta^J_K\right)=\frac{1}{2}\left(M_{IJ}\delta^I_K\dot{q}^J+M_{IJ}\dot{q}^I\delta^J_K\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(M_{KJ}\dot{q}^J+M_{IK}\dot{q}^I\right)\overset{J\leftrightarrow I}{=}\frac{1}{2}\left(M_{KI}\dot{q}^I+M_{KI}\dot{q}^I\right)$$

şi în final

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K}=M_{KI}\dot{q}^I\overset{\text{not}}{\Longleftrightarrow}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}=M_{IJ}\dot{q}^J$$

Aşadar obţinem pentru mărimea conservativă

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\dot{q}^I-L=M_{IJ}\dot{q}^J\dot{q}^I-\frac{1}{2}M_{IJ}\dot{q}^I\dot{q}^J+V(q^I)$$

$$=\frac{1}{2}M_{IJ}\dot{q}^I\dot{q}^J+V(q^I)=T+V\equiv E$$

Aşadar invarianţa sistemelor la translaţii temporale (adică $\frac{\partial L}{\partial t}=0$) conduce la existenţa legii de conservare a energiei totale (E).

2.2. Formalismul Hamiltonian

2.2.1. Ecuațiile de mișcare canonice ale lui Hamilton

Am văzut că în formalismul Lagrangian ecuațiile de mișcare sunt ecuațiile Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \qquad i = \overline{1,f} \equiv 3n-A, \tag{73}$$

care sunt ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi.
Ne propunem în continuare să introduce o altă manieră de abordare în cadrul mecanicii analitice în care mișcarea să fie descrisă de ecuații diferențiale ordinare de ordinul unu (după cum vom vedea dublând coordonatele ce descriu starea sistemului la un moment dat).
Am definit impulsurile canonice conjugate cordonatelor ceneralizate q^i prin

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad i = \overline{1,f} \tag{74}$$

Definim funcția lui Hamilton astfel

$$H = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}^i p_i - L \overset{not}{\equiv} \dot{q}^i p_i - L(q^k; \dot{q}^k, t). \tag{75}$$

Considerăm o variație infinitezimală a lui H

$$dH = p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - dL$$
$$= p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

sau

$$dH = \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{76}$$

Ecuațiile (74) pot fi privite astfel

$$p_i = p_i(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad i = \overline{1,f} \tag{77}$$

adică un sistem f ecuații algebrice în $\dot{q}^i$. Acesta poate fi rezolvat în raport cu $\dot{q}^i$ dacă

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \neq 0 \iff \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0 \tag{78}$$

În cele ce urmează analizăm sistemele dinamice pentru care este îndeplinită această condiție (78)

Ținând cont de (74) (76) devine

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (79)$$

Așadar H este funcție de p_i, q^i și t și putem scrie

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (80)$$

Din (79) și (80) obținem prin identificare

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (81)$$

Până în acest moment nu am utilizat ecuațiile de mișcare Lagrange (73). Presupunem că acestea au loc. Ținând cont de (74) acestea se scriu

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} p_i = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \qquad (82)$$

Ținând cont de a doua egalitate din (81) avem

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (83)$$

Așadar prima egalitate din (81) și (83) ne permite să scriem ecuațiile de mișcare în formalismul Hamiltonian care poartă numele de ecuațiile canonice ale lui Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial q^i} \end{cases} \quad i = \overline{1,7} \qquad (84)$$

Aceste ecuații reprezintă un sistem 27 ecuații diferențiale ordinare de ordinul unu cu funcțiile necunoscute $q^i(t)$ și $p_i(t)$, $i = \overline{1,7}$.

Funcția lui Hamilton se construiește din funcția lui Lagrange astfel

$$H(q^i, p_i, t) = \dot{q}^i(q^i, p_i, t) p_i - L(q^i, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t) \qquad (85)$$

Termenul de canonic se referă la faptul că Hamiltonianul este definit în mod canonic, adică are această formă indiferent de alegerea sistemului de coordonate.
Presupunem că avem următoarea transformare inversabilă de coordonate

$$q^i \to Q^i = Q^i(q^j)$$

de unde obținem

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j . \qquad (86)$$

Transformarea inversă este

$$Q^i \to q^i = q^i(Q^j)$$

de unde obținem

$$\dot{q}^i = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j \qquad (87)$$

Din (86) obținem

$$\frac{\partial \dot{Q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \qquad (88)$$

iar din 87

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{Q}^j} = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \qquad (89)$$

Analizăm în continuare modul de transformare al funcției lui Hamilton

$$H(Q^i, P_i, t) = \dot{Q}^j P_j - L(Q^i, \dot{Q}^i, t) = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\dot{q}^i P_j - L =$$
$$= \dot{q}^i \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^j} - L(q^i, \dot{q}^i, t) = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L(q^i, \dot{q}^i, t) =$$
$$= \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i, t) = H(q^i, p_i, t)$$

În cazul în care Lagrangianul nu depinde de timp putem da o semnificație fizică funcției lui Hamilton. Pentru aceasta considerăm forma generală a lui L

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2} M_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q^i) \qquad (90)$$

Ecuațiile (74) se scriu ținând cont de (90)

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \iff p_k = M_{kj}(q)\dot{q}^j \qquad (91)$$

Rezolvăm ecuațiile (91) în raport cu $\dot{q}^j$. Știm că

$$\det \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^j} \neq 0 \Leftrightarrow \det M_{kj}(q) \neq 0, \quad (92)$$

adică matricea $M_{kj}(q)$ poate fi inversată, având determinant nenul (este nesingulară).

Notăm prin M^{ik} matricea inversă lui M_{kj}. Prin înmulțirea acestor obținem matricea unitate care se exprimă ca elemente de matrice prin δ^i_j, așadar avem

$$M^{ik} M_{kj} = \delta^i_j \quad \text{(cu sumare după } k\text{)} \quad (93)$$

Înmulțim (91) cu M^{ik} și sumăm după k, obținem

$$M^{ik} p_k = M^{ik} M_{kj} \dot{q}^j = \delta^i_j \dot{q}^j = \dot{q}^i$$

așadar am obținut explicitarea vitezelor generalizate

$$\dot{q}^i = M^{ik}(q) p_k \quad (94)$$

Construim acum funcția lui Hamilton (85)

$$H(q^i, p_i) = \dot{q}^i(q^k, p^k) p_i - L(q^i, \dot{q}^i(q^k, p^k)) =$$

$$= M^{ik}(q) p_k p_i - \frac{1}{2} M_{ij} M^{ik} p_k M^{je} p_e + V(q^i) =$$

$$= M^{ik} p_k p_i - \frac{1}{2} \delta^k_j p_k M^{je} p_e + V(q^i) =$$

$$= M^{ik} p_i p_k - \frac{1}{2} M^{ke} p_k p_e + V(q^i)$$

În final obținem

$$H(q^i, p_i) = \frac{1}{2} M^{ik} p_{ik} + V(q^i) = T + V \equiv E \quad (94)$$

Primul termen notat T reprezintă energia cinetică exprimată în raport cu impulsurile generalizate. Putem astfel concluziona că în absența dependenței de timp Hamiltonianul reprezintă chiar energia totală a sistemului.

Exemplu: Considerăm mișcarea unui punct material în plan într-un câmp central.

Am văzut că funcția lui Lagrange este

$$L(\varphi,\dot\varphi,r,\dot r) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r) \qquad (95)$$

Determinăm funcția lui Hamilton. Pentru aceasta scriem ecuațiile de tipul (74)

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot r} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \end{cases} \iff \begin{cases} p_r = m\dot r \\ p_\varphi = m r^2 \dot\varphi \end{cases} \qquad (96)$$

Sistemul algebric (96) se rezolvă în raport cu $\dot r, \dot\varphi$ și obținem

$$\dot r = \frac{p_r}{m}, \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m r^2} \qquad (97)$$

Putem construi acum Hamiltonianul de forma (85)

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \dot r p_r + \dot\varphi p_\varphi - \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) =$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2} - \frac{m}{2}\frac{p_r^2}{m^2} - \frac{m}{2} r^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4} + V(r)$$

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2 m r^2} + V(r) \qquad (98)$$

Ecuațiile canonice Hamilton (ecuații de mișcare) sunt (84)

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

sau concret, ținând cont de forma (98) a lui H

$$\begin{cases} \dot r = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot\varphi = \dfrac{p_\varphi}{m r^2} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dot p_r = -\dfrac{p_\varphi^2}{m r^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dot p_\varphi = 0 \end{cases}$$

Ultima ecuație după cum am mai văzut exprimă conservarea impulsului generalizat p_φ care reprezintă componenta L_z (perpendiculară pe plan) a momentului cinetic

2.2.2 Spațiul fazelor. Paranteza Poisson

Am văzut că în formalismul Lagrangian am introdus coordonatele generalizate $q^i(t)$, $i=\overline{1,f}$. Mișcarea unui sistem de puncte materiale poate fi privită ca evoluția într-un spațiu abstract f-dimensional (adică are dimensiunea egală cu nr. gradelor de libertate) numit spațiul configurațiilor.

În formalismul Hamiltonian cunoașterea mișcării presupune cunoașterea funcțiilor $(q^i(t), p_i(t))$, $i=\overline{1,f}$ care se obțin ca soluții ale ecuațiilor canonice Hamilton având date niște condiții inițiale $q^i(t_0)=q_0^i$ și $p_i(t_0)=p_{0i}$. Condițiile inițiale odată precizate determină unic funcțiile $q^i(t)$ și $p_i(t)$, adică starea fizică a sistemului la orice moment de timp. Ca și în cazul Lagrangian putem privi mișcarea sistemului ca pe mișcarea unui punct reprezentativ într-un spațiu, de data aceasta, $2f$ dimensional, având coordonatele (q^i, p_i) $i=\overline{1,f}$. Acest spațiu se numește spațiul fazelor. Ecuațiile de mișcare Hamilton determină în spațiul fazelor o „suprafață" numită suprafața ecuațiilor de mișcare.

Pe spațiul fazelor se pot defini funcții care depind de q^i, p_i și în general și de timp (t).

$$F = F(q^i, p_i, t).$$

Definim paranteza Poisson a funcțiilor F_1, F_2 prin

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial q^i} \quad \text{(cu sumare după } i\text{)} \qquad (99)$$

- Proprietățile parantezei Poisson

1. antisimetria

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_1, F_2\} \qquad (100)$$

Demonstrație:

$$\{F_1,F_2\}=\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_2}{\partial p_i}-\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial q^i}=-\frac{\partial F_2}{\partial q^i}\frac{\partial F_1}{\partial p_i}+\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\frac{\partial F_1}{\partial q^i}=-\{F_2,F_1\}$$

2. Paranteza Poisson a oricărei constante e nulă

$$\{F, C\}=0 \qquad C=\text{const} \tag{101}$$

Demonstrație:

$$\{F,C\}=\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\underbrace{\frac{\partial C}{\partial p_i}}_{=0}-\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial C}{\partial q^i}}_{=0}=0$$

3. liniaritate în ambele argumente

$$\{\alpha F_1+\beta F_2, F_3\}=\alpha\{F_1,F_3\}+\beta\{F_2,F_3\} \tag{102}$$

$$\{F_1, \alpha F_2+\beta F_3\}=\alpha\{F_1,F_2\}+\beta\{F_1,F_3\}$$

oricare ar fi constantele α și β

Demonstrație:

$$\{\alpha F_1+\beta F_2, F_3\}=\frac{\partial}{\partial q^i}(\alpha F_1+\beta F_2)\frac{\partial F_3}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}(\alpha F_1+\beta F_2)\frac{\partial F_3}{\partial q^i}=$$

$$=\alpha\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_3}{\partial p_i}+\beta\frac{\partial F_2}{\partial q^i}\frac{\partial F_3}{\partial p_i}-\alpha\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_3}{\partial q^i}-\beta\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\frac{\partial F_3}{\partial q^i}=$$

$$=\alpha\{F_1,F_3\}+\beta\{F_2,F_3\}$$

Similar pentru a doua egalitate.

4. Comportarea la derivare parțială în raport cu timpul.

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right\} \tag{103}$$

Demonstrație:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_2}{\partial p_i}-\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial q^i}\right)=$$

$$=\underline{\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial F_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial p_i}}+\underline{\underline{\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial t}}}-\underline{\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{\partial F_2}{\partial q^i}}-\underline{\underline{\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial F_2}{\partial t}}}$$

$$=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right\}$$

5. Proprietatea de derivare

$$\{F_1, F_2F_3\} = \{F_1, F_2\}F_3 + F_2\{F_1, F_3\} \qquad (104)$$

$$\{F_1F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\}F_2 + F_1\{F_2, F_3\}$$

Demonstrație:

$$\{F_1, F_2F_3\} = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_2F_3}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2F_3}{\partial q^i} =$$

$$= \underline{\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_2}{\partial p_i}F_3} + \underline{\underline{\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_3}{\partial p_i}F_2}} - \underline{\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial q^i}F_3} - \underline{\underline{\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\frac{\partial F_3}{\partial p_i}F_2}}$$

$$= \{F_1, F_2\}F_3 + F_2\{F_1, F_3\}$$

Similar pentru a doua egalitate.

6. Identitatea Jacobi

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + \{\{F_3, F_1\}, F_2\} + \{\{F_2, F_3\}, F_1\} = 0 \qquad (105)$$

Demonstrație:

Se face prin calcul direct folosind succesiv definiția parantezei Poisson.

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} = \frac{\partial}{\partial q^i}\{F_1, F_2\}\frac{\partial F_3}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\{F_1, F_2\}\frac{\partial F_3}{\partial q^i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^k}\frac{\partial F_2}{\partial p_k} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k}\frac{\partial F_2}{\partial q^k}\right)\frac{\partial F_3}{\partial p_i} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^k}\frac{\partial F_2}{\partial p_k} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k}\frac{\partial F_2}{\partial q^k}\right)\frac{\partial F_3}{\partial q^i} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i\partial q^k}\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\frac{\partial F_3}{\partial p_i} + \frac{\partial F_1}{\partial q^k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^i\partial p_k}\frac{\partial F_3}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i\partial p_k}\frac{\partial F_2}{\partial q^k}\frac{\partial F_3}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^i\partial q^k}\frac{\partial F_3}{\partial p_i} -$$

$$- \frac{\partial^2 F_1}{\partial p_i\partial q^k}\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\frac{\partial F_3}{\partial q^i} - \frac{\partial F_1}{\partial q^k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_i\partial p_k}\frac{\partial F_3}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial p_i\partial p_k}\frac{\partial F_2}{\partial q^k}\frac{\partial F_3}{\partial q^i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_i\partial q^k}\frac{\partial F_3}{\partial q^i}$$

Similar se scrie și pentru termenul al doilea și al treilea și prin însumarea celor trei termeni se găsesc termeni similari cu semne opuse care se reduc, obținându-se în final zero.

Pe baza definiției parantezei Poisson se pot deduce parantezele între variabilele q^i, p_i de pe spațiul fazelor, numite paranteze Poisson fundamentale.

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \;, \{q^i, q^j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad (106)$$

Demonstrație:

Se utilizează definiția parantezei Poisson (99) și se aleg funcțiile F_1 și F_2

Alegem: $F_1 = q^i$, $F_2 = p_j$

$$\{q^i, p_j\} = \frac{\partial q^i}{\partial q^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q^k} = \delta^i_k\, \delta^k_j - 0 = \delta^i_j$$

$$\{q^i, q^j\} = \frac{\partial q^i}{\partial q^k}\frac{\partial q^j}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k}\frac{\partial q^j}{\partial q^k} = \delta^i_k \cdot 0 - 0\, \delta^j_k = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial q^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q^k} = 0 \cdot \delta^k_j - \delta^k_i \cdot 0 = 0$$

Observație: atunci când funcțiile $F(q^i, p_i, t)$ definite pe spațiul fazelor sunt polinomiale în variabilele q^i, p_i este preferabil să se calculeze parantezele acestora utilizând proprietățile parantezei Poisson și parantezele Poisson fundamentale.

Exemplu: Considerăm componentele carteziene ale momentului cinetic. Ne propunem să determinăm paranteza Poisson pentru două astfel de componente.

$$\vec{L} = \vec{r} \times p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(y p_z - z p_y) + \vec{j}(z p_x - p_z x) + \vec{k}(x p_y - y p_x)$$

Așadar componentele carteziene ale momentului cinetic sunt funcții definite pe spațiul fazelor,

$$q^i \leftrightarrow (x, y, z) \qquad p_i \leftrightarrow (p_x, p_y, p_z),$$

$$L_x = y p_z - z p_y \;, \; L_y = z p_x - x p_z \;, \; L_z = x p_y - y p_x \qquad (107)$$

Parantezele Poisson fundamentale se particularizează astfel. Constatăm că acestea sunt diferite de zero doar pentru perechile canonic conjugate, adică pentru $i=j$ ($\delta^i_i = 1$)

$$\{q^i, p_i\} = 1$$

În cazul nostru avem

$$\{x, p_x\} = 1 \quad , \{y, p_y\} = 1 \ , \ \{z, p_z\} = 1, \qquad (108)$$

restul parantezelor fundamentale fiind nule.

Vom determina paranteza Poisson $\{L_x, L_y\}$

$$\{L_x, L_y\} = \{y p_z - z p_y, z p_x - x p_z\} =$$
$$= \{y p_z, z p_x\} - \{y p_z, x p_z\} - \{z p_y, z p_x\} + \{z p_y, x p_z\}$$

Am folosit succesiv proprietatea de liniaritate (102)

În continuare folosim proprietatea de derivare, dar pentru simplitate vom păstra doar parantezele ce conțin variabile conjugate canonic cu doi termeni ai parantezei Poisson, celelalte conducând la valoarea zero pe baza (108) (sau (106)).

$$\{L_x, L_y\} = \{y p_z, z p_x\} + \{z p_y, x p_z\} =$$
$$= y\{p_z, z\} p_x + p_y \{z, p_z\} x =$$
$$= -y\{z, p_z\} p_x + p_y \{z, p_z\} x \overset{(108)}{=} -y p_x + p_y x \equiv L_z$$

Așadar obținem

$$\{L_x, L_y\} = L_z \qquad (109)$$

2.2.3 Integrale prime în formalismul Hamiltonian Teorema lui Poisson

Pentru început rescriem ecuațiile canonice Hamilton (ecuațiile de mișcare) prin intermediul parantezei Poisson.

Alegem $F_1 = q^k$ și $F_2 = H$ în definiția parantezei Poisson (99) și obținem

$$\{q^k, H\} = \frac{\partial q^k}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q^k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = \delta^k_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - 0\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Alegem $F_1 = p_k$ și $F_2 = H$ și obținem

$$\{p_k, H\} = \frac{\partial p_k}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \delta^i_k \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Rezumând avem

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \{q^k, H\} \quad , \text{și} \ -\frac{\partial H}{\partial q^i} = \{p_k, H\} \qquad (110)$$

utilizăm aceste relații în ecuațiile canonice Hamilton (84) și obținem forma acestora exprimată prin paranteza Poisson

$$\dot{q}^k = \{q^k, H\} \quad , \ \dot{p}_k = \{p_k, H\} \quad , k = \overline{1,f} \qquad (111)$$

Analizăm acum evoluția în timp a unei funcții definite pe spațiul fazelor, $F=F(q^k, p_k, t)$, adică determinăm derivata totală a acesteia în raport cu timpul

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (112)$$

Dacă evoluția are loc pe fața ecuațiilor de mișcare adică au loc ecuațiile canonice Hamilton (84), din care avem $\dot{q}^k$ și $\dot{p}_k$ pe care le introducem în (112). obținem

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q^k} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

sau

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \qquad (113)$$

Trebuie remarcat că ultima relație ne dă evoluția în timp a funcției H pe o „suprafață" din spațiul fazelor (suprafața ecuațiilor de mișcare), deoarece acestea au fost folosite în deducerea lui (113).

Aceste funcții definite pe ecuațiile de mișcare poartă numele de observabile clasice.

Integralele prime (mărimile conservative) în formalismul Hamiltonian sunt observabilele clasice (care satisfac (113)) care sunt (identic) constante pentru orice soluție fixată $q^k = q^k(t)$, $p_k = p_k(t)$ a ecuațiilor de mișcare, adică

$$F(q^k(t), p_k(t), t) \equiv C \qquad (114)$$

cu $q^k(t)$ și $p_k(t)$ soluții ale ecuațiilor de mișcare (Hamilton).

Derivând în raport cu timpul (114) (C-constantă) obținem

$$\frac{dF(q^k(t), p_k(t), t)}{dt} = 0 \qquad (115)$$

Ținând cont de (113) putem concluziona:

O observabilă clasică $F(q^i, p_i, t)$ este integrală primă (Mărime conservativă) dacă și numai dacă

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0 \qquad (116)$$

În cazul în care F nu depinde explicit de timp ($\frac{\partial F}{\partial t}=0$) atunci această condiție de integrală primă se scrie

$$\{F,H\}=0 \qquad (117)$$

În cazul particular în care Hamiltonianul nu depinde de timp ($\frac{\partial H}{\partial t}=0$) avem condiția (117) satisfăcută automat (deoarece $\{H,H\}=-\{H,H\} \Rightarrow \{H,H\}=0$), adică H este integrală primă (mărime conservativă). Putem spune mai mult că energia totală se conservă.

<u>Teorema Poisson</u>. Dacă F_1 și F_2 sunt integrale prime Hamiltoniene pentru un sistem, atunci și paranteza Poisson a acestora $\{F_1,F_2\}$ este integrală primă a acelui sistem.

Demonstrație:

F_1 și F_2 sunt integrale prime, deci satisfac (116) adică

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\{F_1,H\}=0 \text{ și } \frac{\partial F_2}{\partial t}+\{F_2,H\}=0 \qquad (118)$$

Vom vedea dacă și $\{F_1,F_2\}$ satisface această condiție, adică

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}+\{\{F_1,F_2\},H\}=0$$

Pe baza proprietății 4 (103) a parantezei Poisson obținem

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right\} \qquad (119)$$

Utilizăm apoi identitatea Jacobi (105) luând $F_3\equiv H$

$$\{\{F_1,F_2\},H\}+\{\{H,F_1\},F_2\}+\{\{F_2,H\},F_1\}=0$$

de unde

$$\{\{F_1,F_2\},H\}=-\{\{H,F_1\},F_2\}-\{\{F_2,H\},F_1\} \qquad (120)$$

Însumând (119) cu (120) avem

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}+\{\{F_1,F_2\},H\}=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right\}-$$

$$-\{\{H,F_1\},F_2\}-\{\{F_2,H\},F_1\}=$$

$$=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\{\{H,F_1\},F_2\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right\}+\{F_1,\{F_2,H\}\}=$$

$$=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t}+\{H,F_1\},F_2\right\}+\left\{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}+\{F_2,H\}\right\}$$

Utilizăm acum faptul că F_1 și F_2 sunt integrale prime adică (118) și obținem

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_1, F_2\} + \{\{F_1, F_2\}, H\} = \{0, F_2\} + \{F_1, 0\} \equiv 0,$$

adică și $\{F_1, F_2\}$ este integrală primă.

Exemple:

1. Considerăm un sistem cu trei grade de libertate, în caz concret un punct material a cărui mișcare este descrisă în coordonate carteziene (x, y, z).

Presupunem că L_x, L_y sunt integrale prime Hamiltoniene (mărimi conservative). Vom arăta că în acest caz și L_y este mărime conservativă.

Am văzut că $\{L_x, L_y\} = L_z$, relația (109)

Pe baza teoremei Poisson dacă L_x și L_z sunt integrale prime atunci și $\{L_x, L_y\}$ este integrală primă adică L_z este integrală primă.

Mai mult vectorul moment cinetic $\vec{L} = \vec{i}L_x + \vec{j}L_y + \vec{k}L_z$ este integrală primă (adică se conservă vectorul moment cinetic)

2. Considerăm oscilatorul armonic ideal unidimensional.

Am văzut că ~~funcția~~ lui Lagrange pentru acesta este (69)

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - k\frac{x^2}{2} \qquad (121)$$

Determinăm funcția lui Hamilton

$$p_x \equiv p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H(x, p, t) = \dot{x}(p, x, t)\,p - L(x, \dot{x}(p, x, t), t) =$$

$$= \frac{p}{m}p - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + k\frac{x^2}{2}$$

adică

$$H(x, p, t) = H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{x^2}{2} \qquad (122)$$

Ecuațiile canonice Hamilton (de mișcare sunt)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

adică

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \text{și} \quad \dot{p} = -kx \qquad (123)$$

Observăm că $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, adică H este integrală primă (mărime conservativă), dacă sunt satisfăcute ecuațiile de mișcare.

$$H(x,p)=\frac{p^2}{2m}+K\frac{x^2}{2}\equiv E \qquad (124)$$

E energia totală. Odată precizate condițiile inițiale $x(t_0)=x_0$ și $p(t_0)=p_0$ se determină constanta care în acest caz reprezintă energia E.

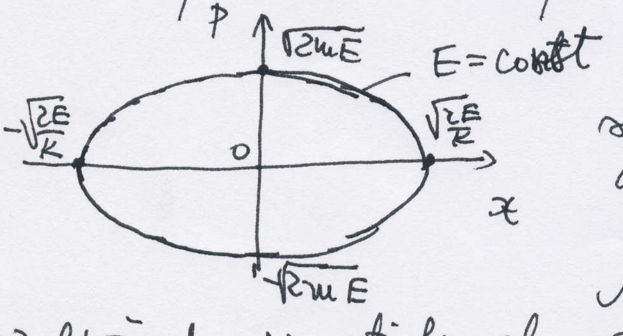
Spațiul fazelor este pentru acest sistem bidimensional. (x, p). Rezolvarea ecuațiilor de mișcare (123), pentru condiții inițiale date sunt $x=x(t)$, $p=p(t)$. Cum (124) este determinată (vezi teoria generală) în condițiile satisfacerii ecuațiilor de mișcare avem

$$\frac{1}{2m}p(t)^2+\frac{K}{2}x(t)^2=E, \ \forall t \qquad (125)$$

Astfel punctul reprezentativ ce descrie mișcarea se așază pe o elipsă în spațiul fazelor. Introducând din (125) obținem

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{K}}\right)^2}+\frac{p^2}{\sqrt{2mE}}=1 \qquad (126)$$

care reprezintă o elipsă de semiaxe $a\equiv\sqrt{\frac{2E}{K}}$ și $b=\sqrt{2mE}$



Pentru alte condiții inițiale se obține o altă elipsă având alte semiaxe determinate de noua valoare a energiei E. Acest lucru se constată și rezolvând ecuațiile de mișcare

$\dot{x}=\frac{p}{m}$ și $\dot{p}=-Kx \Rightarrow \ddot{x}=\frac{\dot{p}}{m}$ și $\dot{p}=-Kx$, și obținem pentru x

$\ddot{x}+\frac{K}{m}x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0$, $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$

Soluția acestei ecuații (s-a văzut la seminar) este

$x(t)=A\sin\omega t$, dacă $x(t=0)=0$ și $\dot{x}(t=0)=v_0 \Leftrightarrow p(t=0)=p_0$;

$p(t)=m\dot{x}=m\omega A\cos\omega t\equiv p_0\cos\omega t$, $A=\frac{p_0}{m\omega}=\frac{v_0}{\omega}$.